



第7章 计数原理

7.1 两个基本计数原理

- 1. D** 【解析】根据分类计数原理,可得不同的选法共有 $6+4+2=12$ (种). 故选 D.
- 2. C** 【解析】显然 $300=2^2 \times 3 \times 5^2$, 则 300 的正因数为 $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$, 其中 $\alpha=0, 1, 2, \beta=0, 1, \gamma=0, 1, 2$, 所以 300 的不同正因数有 $3 \times 2 \times 3=18$ (个).
- 3. (1)9 (2)20 (3)4⁹** 【解析】(1)任取 1 封信,不论从哪个口袋中取,都能单独完成这件事,是分类问题,从第一个口袋中取 1 封信有 5 种取法,从第二个口袋中取 1 封信有 4 种取法,则共有 $5+4=9$ (种)不同的取法.
- (2)从两个口袋里各取 1 封信,不论从哪个口袋中取,都不能单独完成这件事,是分步问题,应分两个步骤完成:第一步,从第一个口袋中取 1 封信,有 5 种取法,第二步,从第二个口袋中取 1 封信,有 4 种取法,由分步计数原理可知,共有 $5 \times 4=20$ (种)不同的取法.
- (3)第一封信投入邮筒有 4 种投法;第二封信投入邮筒有 4 种投法, ..., 第九封信投入邮筒有 4 种投法. 由分步计数原理可知,共有 4^9 种不同的投法.
- 4. 1 296** 【解析】由题图可知,从 A 点到 C 点最短路径有 6 种情况,从 C 点到 B 点最短路径有 6 种情况,所以甲、乙两人同时从 A 点到 B 点并且经过 C 点的最短路径有 $(6 \times 6)^2=1\,296$ (种)不同的走法.
- 5. C** 【解析】由题意知可以按上、下两条路径分为两类,
- 上路径中有 1 条路径,下路径中有 $2 \times 3=6$ (条)不同的路径.
- 根据分类计数原理,不同的路径共有 $1+6=7$ (条).



6. D 【解析】6 人任意报考三所院校的情况共有 $3^6 = 729$ (种).

A 院校没人报的情况有 $2^6 = 64$ (种), 同理 B, C 院校没人报的情况各有 64 种.

A, B 院校都没人报、A, C 院校都没人报、B, C 院校都没人报各有 1 种情况 (提示: 两所院校都没人报的情况重复计数), 所以不同的报考方法共有 $729 - 3 \times 64 + 3 = 540$ (种).

7. B 【解析】因为 $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) | x_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$, 所以 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 都有 3 种不同的取值,

则集合 A 中共有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ (个) 元素,

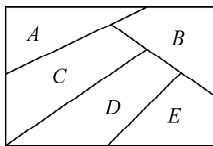
且 $0 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \leq 5, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \in \mathbf{Z}$.

其中满足 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0$ 的情况只有 1 种, 即 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$,

当 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 5$ 时, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 都有 2 种不同的取值, 共有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ (种) 不同的情况.

所以集合 A 中满足条件 $1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \leq 4$ 的元素个数为 $243 - 1 - 32 = 210$. 故选 B.

8. 1 920 【解析】如图, 设 5 个区域分别是 A, B, C, D, E.



第一步: 选择 1 种花卉种植在 A 区域, 有 6 种选择方法.

第二步: 从剩下的 5 种花卉中选择 1 种植在 B 区域, 有 5 种选择方法.

第三步: 从剩下的 4 种花卉中选择 1 种植在 C 区域, 有 4 种选择方法.

第四步: 若区域 D 与区域 A 种植同种花卉, 则区域 E 可选择的花卉有 4 种; 若区域 D 与区域 A 种植不同种花卉, 则区域 D 有 3 种选择方法, 区域 E 有



4 种选择方法.

故不同的种植方法种数是 $6 \times 5 \times 4 \times (1 \times 4 + 3 \times 4) = 1\,920$.

9.18 【解析】根据 $5+4-7=2$ 可知,有 2 名学生既会下象棋又会下围棋.

选参加象棋比赛的学生有两种选法:在只会下象棋的 3 人中选或在既会下象棋又会下围棋的 2 人中选;选参加围棋比赛的学生也有两种选法:在只会下围棋的 2 人中选或在既会下象棋又会下围棋的 2 人中选. 则可得四类不同的选法.

从 3 名只会下象棋的学生中选 1 名参加象棋比赛,同时从 2 名只会下围棋的学生中选 1 名参加围棋比赛,有 $3 \times 2 = 6$ (种)选法;

从 3 名只会下象棋的学生中选 1 名参加象棋比赛,同时从 2 名既会下象棋又会下围棋的学生中选 1 名参加围棋比赛,有 $3 \times 2 = 6$ (种)选法;

从 2 名只会下围棋的学生中选 1 名参加围棋比赛,同时从 2 名既会下象棋又会下围棋的学生中选 1 名参加象棋比赛,有 $2 \times 2 = 4$ (种)选法;

2 名既会下象棋又会下围棋的学生分别参加象棋比赛和围棋比赛,有 2 种选法.

综上,共有 $6+6+4+2=18$ (种)选法.

10.25 758 【解析】先只考虑相邻字符不同的密码,共有 $9 \times 8^4 = 36\,864$ (种).

这里面不满足要求的密码有两类:

第一类是仅包含单一字符类型(如全数字),这类共有 $3 \times 3 \times 2^4 = 144$ (种);

第二类是仅包含两种字符类型(如数字和小写字母),共有 6 个不同的字符可选,

只满足相邻字符不同的密码有 $6 \times 5^4 = 3\,750$ (种),其中只含有单一字符类型的有 $2 \times 3 \times 2^4 = 96$ (种),

故第二类共有 $3 \times (3\,750 - 96) = 10\,962$ (种).



所以可以设置不同密码的总个数为

$$36\ 864 - 144 - 10\ 962 = 25\ 758.$$

7.2 排列

1. B 【解析】方法一： $\frac{2A_8^5 + 7A_8^4}{A_9^5 - A_8^5} =$

$$\frac{2 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 + 7 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 - 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4} =$$

$$\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times (8+7)}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times (9-4)} = 3.$$

$$\text{方法二: } \frac{2A_8^5 + 7A_8^4}{A_9^5 - A_8^5} = \frac{2A_8^5 + \frac{7}{4}A_8^5}{\frac{9}{4}A_8^5 - A_8^5} =$$

$$\frac{2 + \frac{7}{4}}{\frac{9}{4} - 1} = 3.$$

$$\text{方法三: } \frac{2A_8^5 + 7A_8^4}{A_9^5 - A_8^5} = \frac{\frac{2 \times 8!}{3!} + \frac{7 \times 8!}{4!}}{\frac{9!}{4!} - \frac{8!}{3!}} =$$

$$\frac{8+7}{9-4} = 3.$$

故选 B.

2. C 【解析】由 $A_{n-1}^2 - n < 7$, 得 $(n-1)(n-2) - n < 7$, 整理得 $n^2 - 4n - 5 < 0$, 解得 $-1 < n < 5$.

由题可知, $n-1 \geq 2$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$, 则 $n=3$ 或 $n=4$, 即原不等式的解集为 $\{3, 4\}$.

故选 C.

3. B 【解析】方法一: 分 2 步完成, 即第一排从 10 位同学中, 选取 5 位进行排列; 第二排将剩下的 5 位进行排列, 所以不同的排列种数有 $A_{10}^5 A_5^5 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = A_{10}^{10}$.

方法二: 可以将两排的问题转化成 10 位同学排成一排, 相当于 10 个人到 10 个位置就座, 所以不同的排列种数有 A_{10}^{10} . 故选 B.

4. D 【解析】按两个班共选择活动项数分三类.

第一类: 两个班共选择两项活动, 有 A_6^2 种选法;

第二类: 两个班共选择三项活动, 有



$A_2^1 A_6^3$ 种选法;

第三类:两个班共选择四项活动,有 A_6^4 种选法.

则活动安排方案的种数为 $A_6^2 + A_2^1 A_6^3 + A_6^4 = 630$.

故选 D.

5. $A_{n+1}^{n+1} - 1$ 【解析】因为 $kA_k^k = (k+1)A_k^k - A_k^k = A_{k+1}^{k+1} - A_k^k$, 所以 $A_1^1 + 2A_2^2 + 3A_3^3 + \cdots + nA_n^n = A_2^2 - A_1^1 + A_3^3 - A_2^2 + \cdots + A_{n+1}^{n+1} - A_n^n = A_{n+1}^{n+1} - 1$. 故原式 $= A_{n+1}^{n+1} - 1$.

6. 3 【解析】因为 $A_5^x = 2A_6^{x-1}$, 所以 $\frac{5!}{(5-x)!} = 2 \cdot \frac{6!}{(7-x)!}$, 且 $1 \leq x \leq 5, 1 \leq x-1 \leq 6, x \in \mathbf{N}^*$, 即 $2 \leq x \leq 5, x \in \mathbf{N}^*$, 化简得 $(7-x)(6-x) = 12$, 解得 $x = 3$ 或 $x = 10$ (舍去), 所以 $x = 3$.

7. 136 080 【解析】方法一(位置分析法):先排第 2 个节目,再排其他 5 个节目,则共有 $A_9^1 A_9^5 = 136\,080$ (种)不同的排法.

方法二(元素分析法):若选女演员的独唱节目,则有 $5A_9^5$ 种排法;若不选女演员的独唱节目,则有 A_9^6 种排法,则共有 $5A_9^5 + A_9^6 = 136\,080$ (种)排法.

方法三(间接法):总数减去女演员的独唱节目排在第 2 个的排法种数,则共有 $A_{10}^6 - A_9^5 = 136\,080$ (种)排法.

8. D 【解析】依题意,7 名棋手进行全排列有 A_7^7 种,其中一班 5 名棋手的出场顺序已经排定,有 A_5^5 种,所以不改变一班棋手出场顺序的不同排法种数为 $\frac{A_7^7}{A_5^5} = 7 \times 6 = 42$.

9. C 【解析】第一步:捆绑 A, B, C, 先排 A, B, C 3 辆车,共有 $A_3^3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ (种)排法,

第二步:将另外 3 辆车捆绑,再排另外 3 辆车,共有 $A_3^3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ (种)排法,

第三步:还剩 2 个空车位,把 2 个捆绑体插入 2 个空车位产生的 3 个空中共有 $A_3^2 = 3 \times 2 = 6$ (种)排法,由分步计数原理可知这 6 辆车符合条件的不同停



放方法种数为 $6 \times 6 \times 6 = 216$. 故选 C.

10. D 【解析】先假设 CD 是实线,

则从 A 到 B , 向上 3 次, 向右 4 次, 最

短路径有 $\frac{A_7^7}{A_3^3 A_4^4} = 35$ (条),

其中经过 CD 的, 即先从 A 到 C , 然后

C 到 D , 最后 D 到 B 的最短路径有

$3 \times 3 = 9$ (条),

所以当 CD 不通时, 最短路径有 $35 -$

$9 = 26$ (条). 故选 D.

11. 240 【解析】把甲、乙“捆绑”看成一个

元素, 该元素与其余 4 人排列共有

$A_5^5 = 120$ (种) 不同的安排方式,

故甲、乙 2 名志愿者必须在相邻 2 个

路口的安排方式的种数为 $A_2^2 \times$

$120 = 240$.

12. 210 【解析】方法一(空位插空法):

七个位置先安排 2, 4, 6 三个数, 排法

种数为 A_7^3 , 然后 1, 3, 5, 7 的顺序按照

要求只能是 1 种, 由分步计数原理得

符合条件的七位数的个数为 $A_7^3 \times$

$1 = 210$.

方法二(逐步插空法): 先将 1, 3, 5, 7

按固定顺序排好, 这四个数有 5 个空

隙, 将 2 插入, 有 5 个空隙可以选择,

然后再将 4 插入, 有 6 个空隙可以选

择, 最后将 6 插入, 有 7 个空隙可以

选择, 所以由分步计数原理得符合条

件的七位数的个数为 $5 \times 6 \times 7 = 210$.

13. 30 【解析】若直线 $Ax + By + C = 0$ 经

过坐标原点, 则 $C = 0$,

那么 A, B 从剩余 6 个元素中任意取

2 个即可, 有 $A_6^2 = 30$ (条).

14. 【解】(1) 可分两步完成: 第一步, 先

选 r , 因为 $r > 0$, 所以有 A_8^1 种选法; 第

二步, 再选 a, b , 在剩余 8 个数中任取

2 个, 有 A_8^2 种选法. 由分步计数原理

可知, 可以作 $A_8^1 A_8^2 = 448$ (个) 不同

的圆.

(2) 若圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 经过原

点, 则 a, b, r 满足 $a^2 + b^2 = r^2$. 满足该

条件的 a, b, r 有 3, 4, 5 与 6, 8, 10 两



组,考虑 a, b 的顺序,每组各有 A_2^2 种情况,所以符合题意的圆有 $2A_2^2 = 4$ (个).

(3)若圆心在直线 $x+y-10=0$ 上,则 a, b 满足 $a+b=10$,则满足条件的 a, b 有三组: $0, 10; 3, 7; 4, 6$.

当 a, b 取 $0, 10$ 时, r 有 A_7^1 种情况,
当 a, b 取 $3, 7$ 或 $4, 6$ 时, r 不可取 0 ,
有 A_6^1 种情况.

考虑 a, b 的顺序,每组各有 A_2^2 种情况,所以满足题意的圆共有 $A_7^1 A_2^2 + 2A_6^1 A_2^2 = 38$ (个).

15. 【解】依题意,从 1 到 7 这 7 个数字中取 2 个偶数、3 个奇数,共有 $3 \times 4 = 12$ (种)情况.

(1)共有 $12A_5^5 = 1\,440$ (个)五位数.

(2)把选出的偶数“捆绑”在一起,和奇数进行全排列,故其中偶数排在一起的有 $12A_2^2 A_4^4 = 576$ (个).

(3)把选出的偶数“捆绑”在一起,把选出的奇数也“捆绑”在一起,再全排列,故其中偶数排在一起,奇数也排在一起的有 $12A_2^2 A_3^3 A_2^2 = 288$ (个).

(4)先排 3 个奇数,2 个偶数插空,故其中 2 个偶数不相邻的共有 $12A_3^3 A_4^2 = 864$ (个).

16. 252 【解析】易知 $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 中的元素两两不互质,因此恰好在 6 个不同的集合中,

依次设为 Y_2, Y_4, \dots, Y_{12} .

此时剩余的正整数中 1, 7, 11 可以任意放在上述 6 个集合中,5 不能放在 Y_{10} 中,3, 9 不能放在 Y_6 或 Y_{12} 中,分 2 种情况:

①若 5 放入了 Y_6 或 Y_{12} 中,有 A_2^1 种情况,此时 3 与 9 可在 4 个集合中选择,有 A_4^2 种情况,而 1, 7, 11 放入剩下的集合中有 A_3^3 种情况.

②若 5 没有放入 Y_6 或 Y_{12} 中,则 5 有 3 个集合可以选择,有 A_3^1 种情况,进而 3 与 9 可在 3 个集合中选择,有 A_3^2 种情况,而 1, 7, 11 放入剩下的集合



中有 A_3^3 种情况.

综上所述,不同的集合拆分方法共有

$$A_2^1 A_4^2 A_3^3 + A_3^1 A_3^2 A_3^3 = 252(\text{种}).$$

7.3 组合

1. A 【解析】 $3C_8^6 + A_6^2 = 3C_8^2 + A_6^2 = 3 \times$

$$\frac{8 \times 7}{2 \times 1} + 6 \times 5 = 114. \text{ 故选 A.}$$

2. C 【解析】由组合数的性质可得

$$\begin{cases} 3n+6 \leq 18, \\ 4n-2 \leq 18, \end{cases} \text{ 解得 } n \leq 4,$$

又 $C_{18}^{3n+6} = C_{18}^{4n-2}$, 所以 $3n+6 = 4n-2$ 或

$$3n+6+4n-2 = 18,$$

解得 $n=8$ (舍去)或 $n=2$, 故 $A_n^2 + C_{n+2}^2 =$

$$A_2^2 + C_4^2 = 2+6=8. \text{ 故选 C.}$$

3. A 【解析】携带工具方案有两类:

第一类,1 个钩子,1 个夹子,3 把铁锹,

则不同的安排方案有 $C_5^3 C_2^1 = 20(\text{种})$;

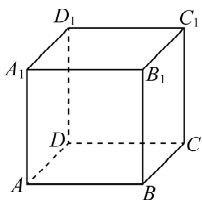
第二类,1 个钩子,2 个夹子,2 把铁锹,

则不同的安排方案有 $C_5^2 C_3^2 = 30(\text{种})$.

故不同的安排方案共有 50 种. 故

选 A.

4. C 【解析】如图所示,



正方体由 6 个面构成,在这 6 个面内

任取 3 个顶点都在同一个表面正方形

内,共有 $6C_4^3 = 24(\text{种})$ 选法. 在正方体

的 8 个顶点中任选 3 个共有 $C_8^3 =$

56(种)选法.

所以在正方体的 8 个顶点中任选 3

个,这 3 个顶点恰好不在同一个表面

正方形中的选法共有 $56 - 24 =$

32(种).

5. (1) 46 (2) 4 (3) 462 (4) 10(答

案不唯一) 【解析】(1) 由已知得

$$\begin{cases} 0 \leq 10-n \leq 2n+3, \\ 0 \leq 3n \leq n+7, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{7}{3} \leq n \leq \frac{7}{2},$$

又 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $n=3$,

$$\text{所以 } C_{2n+3}^{10-n} + C_{n+7}^{3n} = C_9^7 + C_{10}^9 = 36 + 10 = 46.$$



(2) 因为 $xC_x^{x-1} + A_x^3 = 4C_{x+1}^3$, 所以 $x \cdot x +$

$$x \cdot (x-1)(x-2) = 4 \times \frac{(x+1)x(x-1)}{3 \times 2 \times 1},$$

$x \geq 3$, 化为 $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$, 解得 $x = 4$.

(3) 由 $\frac{1}{C_5^m} - \frac{1}{C_6^m} = \frac{7}{10C_7^m}$ 可得 $\frac{m!(5-m)!}{5!} -$

$$\frac{m!(6-m)!}{6!} = \frac{7 \times m! \times (7-m)!}{10 \times 7!},$$

$$\text{即 } \frac{m!(5-m)!}{5!} - \frac{m! \times (6-m) \times (5-m)!}{6 \times 5!} =$$

$$\frac{7 \times m! \times (7-m)(6-m)(5-m)!}{10 \times 7 \times 6 \times 5!},$$

化简得 $1 - \frac{6-m}{6} = \frac{(7-m)(6-m)}{10 \times 6}$, 整理

得 $m^2 - 23m + 42 = 0$,

解得 $m = 2$ 或 $m = 21$,

因为 $0 \leq m \leq 5$, 所以 $m = 2$,

所以 $C_7^2 + C_7^3 + C_8^4 + C_9^5 + C_{10}^6 = C_8^3 + C_8^4 + C_9^5 +$

$C_{10}^6 = C_9^4 + C_9^5 + C_{10}^6 = C_{10}^5 + C_{10}^6 = C_{11}^6 = C_{11}^5 =$

$$\frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 462.$$

(4) 不等式 $C_6^4 < C_n^2 \leq C_{10}^2$ 可化为 $15 <$

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq 45, \text{ 整理得 } \begin{cases} n^2 - n - 30 > 0, \\ n^2 - n - 90 \leq 0, \end{cases} \text{ 而}$$

$n \geq 2$, 解得 $6 < n \leq 10$, 又 $n \in \mathbf{N}^*$, 因此

$n \in \{7, 8, 9, 10\}$, 所以 n 的一个取值可能

是 10 (答案不唯一).

6.36 【解析】按取出的白球、红球个数逐一分析:

①白球取 1 个, 红球取 3 个,

白球编号为奇数, 红球编号要 2 个偶数 1

个奇数, 共有 $C_2^1 \cdot C_2^1 = 4$ (种) 可能; 编号

为奇数和偶数个数相同, 故白球编号

为偶数时, 也有 4 种可能, 所以共有 8

种可能.

②白球取 2 个, 红球取 2 个,

若白球编号都为奇或偶, 则红球编号

也都为奇或偶, 共有 $C_2^1 \cdot C_2^1 = 4$ (种)

可能;

若白球编号 1 奇 1 偶, 则红球编号也

要 1 奇 1 偶, 共有 $C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 =$

16 (种) 可能.

③由于对称性, 白球取 3 个, 红球取 1

个的情况等同于白球取 1 个, 红球取 3



个的情况,所以共有 8 种可能.

综上,共有 $8 \times 2 + 4 + 16 = 36$ (种)可能.

7.3 【解析】由题可知, $C_5^2 C_x^1 = 30$,

$$\text{即 } \frac{5 \times 4}{2} x = 30, \text{ 解得 } x = 3.$$

8. C 【解析】由于甲、乙都不是最差的,且乙的名次比甲差,所以甲、乙均在前 4 名中,且甲在乙的前面,故从前 4 名中选择两个名次安排甲、乙的名次,共有 C_4^2 种方法,接下来将剩下 3 人全排列,共有 A_3^3 种方法,故满足条件的情况数为 $C_4^2 A_3^3 = 36$. 故选 C.

9. D 【解析】第一步,将四位学生分成三组,即随机选取两人为一组,其余剩下两人每人单独一组,故有 C_4^2 种分法;第二步,将三组学生排列到三门课程中,共有 A_3^3 种排列方法,所以不同的报名方法有 $C_4^2 A_3^3 = 36$ (种). 故选 D.

10. C 【解析】第一步,先分组,分为一组 2 人,另一组 4 人,有 $C_2^1 C_4^1 = 8$ (种)分组方法;

分为每组各 3 人,有 $\frac{C_2^1 C_4^2}{A_2^2} = 6$ (种)分组方法.

分组方法共有 $8 + 6 = 14$ (种).

第二步,将两组志愿者分配到两个服务站共有 $A_2^2 = 2$ (种)分法.

所以不同的分配方案有 $14 \times 2 = 28$ (种).

11. B 【解析】若有两个岗位各有 2 名学生报考,一个岗位有 1 名学生报考,

则有 $\frac{C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1}{A_2^2} \cdot A_3^3$ 种报考方法.

若有两个岗位各有 1 名学生报考,一个岗位有 3 名学生报考,则有

$\frac{C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1}{A_2^2} \cdot A_3^3$ 种报考方法.

所以共有 $\frac{C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1}{A_2^2} \cdot A_3^3 +$

$\frac{C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 150$ (种)报考

方法.



12. 20 【解析】将 7 个三好学生名额排成一排,从 6 个空中插入 3 个隔板,将名额分成 4 组,故分配方案共有 $C_6^3 = 20$ (种).

13. 190 【解析】若求方程 $x+y+z=18$ 的非负整数解有多少组,即求方程 $X+Y+Z=21$ ($X=x+1, Y=y+1, Z=z+1$) 的正整数解有多少组,即在 21 个位置产生的 20 个空里插入 2 个隔板,所以有 $C_{20}^2 = 190$ (组).

14. 165 【解析】先给每人分 2 本书,然后将剩下的 12 本书用隔板法分给 4 名学生,12 本书之间有 11 个空隙,插入 3 个隔板,共有 $C_{11}^3 = 165$ (种)分法.

所以每名学生至少得 3 本书,共有 165 种不同的分法.

15. 【解】从这 12 名翻译人员中选 6 人,其中 3 人翻译英语,3 人翻译法语,可以分为下面 4 种情况.

①只会英语的 3 人都去翻译英语,有 $C_3^3 \cdot C_9^3 = 84$ (种)选法;

②从只会英语的 3 人中选 2 人去翻译英语,从既能翻译英语,也能翻译法语的人中选取 1 人去翻译英语,有 $C_3^2 \cdot C_5^1 \cdot C_8^3 = 840$ (种)选法;

③从只会英语的 3 人中选 1 人去翻译英语,从既能翻译英语,也能翻译法语的人中选 2 人去翻译英语,有 $C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_7^3 = 1\,050$ (种)选法;

④只会英语的 3 人中没有人去翻译英语,从既能翻译英语,也能翻译法语的人中选取 3 人去翻译英语,有 $C_3^0 \cdot C_5^3 \cdot C_6^3 = 200$ (种)选法.

综上,共有 $84 + 840 + 1\,050 + 200 = 2\,174$ (种)不同的选法.

16. 【解】由题意知小组赛中共有 $3 \times C_4^2 = 18$ (场)比赛,

淘汰赛第一轮(8 强赛)共有 4 场比赛,

淘汰赛第二轮(4 强赛)共有 2 场比赛,冠亚军有 1 场比赛,三四名有 1



场比赛,

所以一共有 $18+4+2+1+1=26$ (场) 比赛.

17. D 【解析】由题意可知,千位和十位上的数字奇偶性相同.

当千位和十位上的数字都为奇数时,满足条件的五位数有 $C_5^2 C_6^1 C_6^1 = 360$ (个);

当千位和十位上的数字均为偶数且不含 0 时,满足条件的五位数有 $C_4^2 C_6^1 C_6^1 = 216$ (个);

当千位为 0,十位为 2,4,6,8 时,满足条件的五位数有 $C_4^1 A_7^2 = 168$ (个).

综上,满足条件的五位数共有 $360+216+168=744$ (个). 故选 D.

7.4 二项式定理

7.4.1 二项式定理+

7.4.2 二项式系数的性质及应用

1. C 【解析】 $(x-1)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_{10}^r x^{10-r} \cdot (-1)^r$,
故第 4 项 $T_4 = C_{10}^3 x^{10-3} (-1)^3 = -C_{10}^3 x^7$,
故选 C.

2. A 【解析】 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^4 = C_4^0 x^4 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^0 + C_4^1 x^3 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^1 + C_4^2 x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^2 + C_4^3 x^1 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^3 + C_4^4 x^0 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^4$
 $= x^4 - 4x^2 + 6 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}.$

3. B 【解析】借助二项式定理可得 $\frac{C_{10}^0}{2^0} - \frac{C_{10}^1}{2^1} + \frac{C_{10}^2}{2^2} - \cdots + \frac{C_{10}^{10}}{2^{10}} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1\,024}.$

4. C 【解析】第 2 项、第 3 项、第 4 项的二项式系数成等差数列,即 C_n^1, C_n^2, C_n^3 构成等差数列,

所以 $2C_n^2 = C_n^1 + C_n^3$, 即 $2 \times \frac{n(n-1)}{2 \times 1} = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}$, 且 $n \in \mathbf{N}^*, n \geqslant 3$,



可得 $n^2 - 9n + 14 = 0$, 解得 $n = 7$ 或 $n = 2$ (舍去).

5. D 【解析】 $\left(x^2 + \frac{1}{3x}\right)^6$ 的展开式的通

$$\text{项为 } T_{r+1} = C_6^r \cdot (x^2)^{6-r} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^r \cdot x^{-r} =$$

$$C_6^r \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^r \cdot x^{12-3r},$$

令 $12 - 3r = 0$, 解得 $r = 4$, 所以常数项为

$$C_6^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 15 \times \frac{1}{81} = \frac{5}{27}. \text{ 故选 D.}$$

6. D 【解析】 $\left(\frac{a}{x} + \sqrt{x}\right)^5$ 的展开式的通

$$\text{项为 } T_{r+1} = C_5^r \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^{5-r} \cdot (\sqrt{x})^r = C_5^r \cdot$$

$$a^{5-r} \cdot x^{\frac{3r}{2}-5}, r=0, 1, \dots, 5, \text{ 由 } \frac{3r}{2} - 5 = 1,$$

$$\text{解得 } r=4, \text{ 所以 } T_5 = C_5^4 \cdot ax = 5ax.$$

由 $5a = 20$, 得 $a = 4$. 故选 D.

7. D 【解析】方法一: $\left(x + \frac{1}{x} + 2\right)^6$ 的展

$$\text{开式中含 } x^3 \text{ 的项为 } C_6^3 \cdot x^3 \cdot C_3^3 \cdot 2^3 +$$

$$C_6^4 \cdot x^4 \cdot C_2^1 \cdot \frac{1}{x} \cdot C_1^1 \cdot 2 = 160x^3 +$$

$$60x^3 = 220x^3 \left(\text{提示: } C_6^3 \cdot x^3 \cdot C_3^3 \cdot 2^3 \right.$$

$$\text{表示 6 个 } \left(x + \frac{1}{x} + 2\right) \text{ 中有 3 个取 } x, \text{ 有}$$

$$3 \text{ 个取 } 2; C_6^4 \cdot x^4 \cdot C_2^1 \cdot \frac{1}{x} \cdot C_1^1 \cdot 2 \text{ 表}$$

$$\text{示 6 个 } \left(x + \frac{1}{x} + 2\right) \text{ 中有 4 个取 } x, 1 \text{ 个}$$

$$\text{取 } \frac{1}{x}, 1 \text{ 个取 } 2. \text{ 其他情况不可能存在}$$

$$x^3 \left. \right). \text{ 故选 D.}$$

$$\text{方法二: } \left(x + \frac{1}{x} + 2\right)^6 = \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x}\right)^6 =$$

$$\frac{(x+1)^{12}}{x^6}, (x+1)^{12} \text{ 的展开式的通项为}$$

$$C_{12}^k x^{12-k}, \text{ 令 } k=3, \text{ 得 } x^9 \text{ 的系数为 } C_{12}^3 =$$

$$220, \text{ 所以 } \left(x + \frac{1}{x} + 2\right)^6 \text{ 的展开式中 } x^3$$

的系数为 220. 故选 D.

8. D 【解析】 $\because \left(x + \frac{m}{x}\right) \left(x - \frac{1}{x}\right)^5 =$

$$\left(x + \frac{m}{x}\right) \cdot (C_5^0 \cdot x^5 - C_5^1 \cdot x^3 + C_5^2 \cdot x -$$



$$C_5^3 \cdot x^{-1} + C_5^4 \cdot x^{-3} - C_5^5 \cdot x^{-5}),$$

\therefore 它的展开式中常数项是 $-C_5^3 + m \cdot$

$$C_5^2 = 10, \therefore m = 2. \text{ 故选 D.}$$

9. A 【解析】 由 $x^4 + (x+1)^7 = a_0 + a_1 \cdot (x+2) + a_2(x+2)^2 + \cdots + a_7(x+2)^7 = [(x+2)-2]^4 + [(x+2)-1]^7$, 得 $a_3 = C_4^1(-2) + C_7^4(-1)^4 = -8 + 35 = 27$. 故选 A.

10. A 【解析】 方法一: 因为 $(xy+y-2x-2)^6$ 表示六个因式 $(xy+y-2x-2)$ 的乘积, 展开式中要得到含 x^3y^5 的项, 需有两个因式取 xy , 一个因式取 $-2x$, 剩下的三个因式取 y 或有三个因式取 xy , 两个因式取 y , 剩下的一个因式取 -2 , 所以展开式中 x^3y^5 的系数为 $C_6^2 \cdot C_4^1 \cdot (-2) \cdot C_3^3 + C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 \cdot (-2) = -120 - 120 = -240$. 故选 A.

方法二: $(xy+y-2x-2)^6 = [y(x+1) - 2(x+1)]^6 = (x+1)^6(y-2)^6$, $(x+1)^6$ 的展开式的通项为 $C_6^r x^{6-r}$, $(y-2)^6$ 的展开式的通项为 $C_6^k y^{6-k}(-2)^k$,

令 $r=3$ 且 $k=1$, 则 x^3y^5 的系数为 $C_6^3 \cdot C_6^1 \cdot (-2)^1 = -240$. 故选 A.

11. A 【解析】 原式 $= (1+0.998)^5 - 1 = (2-0.002)^5 - 1 = C_5^0 2^5 - C_5^1 2^4 \times 0.002 + C_5^2 2^3 \times 0.002^2 - \cdots - C_5^5 \times 0.002^5 - 1 \approx 32 - 0.16 - 1 = 30.84$. 故选 A.

12. A 【解析】 因为 $55^{55} = (56-1)^{55} = C_{55}^0 \times 56^{55} - C_{55}^1 \times 56^{54} + C_{55}^2 \times 56^{53} - C_{55}^3 \times 56^{52} + \cdots + C_{55}^{54} \times 56 - C_{55}^{55}$,

显然, 除了最后一项 -1 外, 其余的各项都能被 7 整除, 所以 55^{55} 除以 7 的余数为 6. 又今天是星期四, 所以经过 55^{55} 天后是星期三, 故选 A.

13. 240 20 【解析】 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_6^r \cdot (-1)^r \cdot 2^{6-r} \cdot x^{6-\frac{3}{2}r}$, 令 $6 - \frac{3}{2}r = 3$, 可得 $r=2$, 故 x^3 的系数是 $(-1)^2 \cdot C_6^2 \cdot 2^4 = 240$, 第四项的二项式系数是 $C_6^3 = 20$.



14. 【证明】 $\because 11^{10} - 1 = (10+1)^{10} - 1$

$$= (10^{10} + C_{10}^1 \cdot 10^9 + C_{10}^2 \cdot 10^8 + \cdots + C_{10}^9 \cdot 10 + 1) - 1$$

$$= 10^{10} + C_{10}^1 \cdot 10^9 + C_{10}^2 \cdot 10^8 + \cdots + 10^2$$

$$= 100 (10^8 + C_{10}^1 \cdot 10^7 + C_{10}^2 \cdot 10^6 + \cdots + 1),$$

$\therefore 11^{10} - 1$ 能被 100 整除.

15. D 【解析】由题意可得 $x = C_{2n}^n$, $y = C_{2n+1}^{n+2}$ 或 C_{2n+1}^{n+1} , 且 $C_{2n+1}^{n+2} = C_{2n+1}^{n+1}$,

$$\text{故 } 11C_{2n}^n = 6C_{2n+1}^{n+1}, \text{ 即 } 11 \times \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = 6 \times$$

$$\frac{(2n+1)!}{n! \cdot (n+1)!}, \text{ 即 } 11 = 6 \times \frac{2n+1}{n+1}, \text{ 解得}$$

$$n = 5.$$

16. CD 【解析】因为 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开

式中第 4 项与第 9 项的二项式系数相等, 所以 $C_n^3 = C_n^8$, 所以 $n = 11$, 由于展开式中项的系数与二项式系数相等, 故展开式中系数最大的项为第 6 项和第 7 项. 故选 CD.

17. C 【解析】由二项式定理易知选项 A

错误; 令 $x = 0$, 得 $a_0 = 1$, 令 $x = \frac{1}{2}$, 得

$$0 = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{2^{022}}}{2^{2^{022}}}, \therefore \frac{a_1}{2} +$$

$$\frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{2^{022}}}{2^{2^{022}}} = -1, \text{ 故选项 B 错误; 令}$$

$$x = 1, \text{ 得 } a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{022}} = 1 \text{ ①, 令}$$

$$x = -1, \text{ 得 } a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{2^{022}} =$$

$$3^{2^{022}} \text{ ②, 由 ①+② 得 } 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots +$$

$$a_{2^{022}}) = 3^{2^{022}} + 1, \therefore a_2 + a_4 + \cdots + a_{2^{022}} =$$

$$\frac{3^{2^{022}} - 1}{2}, \text{ 故选项 C 正确; } \because (1 +$$

$2x)^{2^{022}}$ 的展开式的各项系数之和减去

a_0 就相当于 $|a_1| + |a_2| + \cdots +$

$$|a_{2^{022}}|, \therefore |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{2^{022}}| =$$

$$3^{2^{022}} - a_0 = 3^{2^{022}} - 1, \text{ 故选项 D 错误. 故}$$

选 C.

18. ACD 【解析】令 $x = 1$, 得 $a_0 = 2$, 故 A 正确;

$$x^6 + x^{12} = [(x-1) + 1]^6 + [(x-1) +$$

$$1]^{12}, \text{ 因为 } [(x-1) + 1]^{12} \text{ 的展开式的通}$$



项 $T_{k+1} = C_{12}^k \cdot (x-1)^{12-k}$, 令 $12-k=12$, 得 $k=0$, 则 $T_1 = C_{12}^0 (x-1)^{12} = (x-1)^{12}$, 所以 $a_{12}=1$, 故 B 错误;

令 $12-k=10$, 得 $k=2$, 则 $T_3 = C_{12}^2 (x-1)^{10} = 66(x-1)^{10}$, 从而 $a_{10}=66$, 故 D 正确;

令 $x=0$, 得 $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{12} = 0$, 因为 $a_0=2$,

所以 $a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{11} - a_{12} = 2$, 故 C 正确.

故选 ACD.

19. B 【解析】因为 $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开

式中有且仅有第五项的二项式系数最大, 所以 $\frac{n}{2} + 1 = 5$, 解得 $n=8$, 则

$\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式的通项 $T_{k+1} = C_8^k \cdot (2x^2)^{8-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k = C_8^k \cdot 2^{8-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{16-3k}$ ($k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$).

因为当 k 为奇数时, 系数为负数; 当 k 为偶数时, 系数为正数, 所以展开式中系数最大时, k 为偶数, 由展开式的通项可知 $T_1 = C_8^0 2^8 x^{16} = 256x^{16}$, $T_3 = C_8^2 2^6 x^{10} = 1792x^{10}$, $T_5 = C_8^4 2^4 x^4 = 1120x^4$, $T_7 = C_8^6 2^2 x^{-2} = 112x^{-2}$, $T_9 = C_8^8 2^0 x^{-8} = x^{-8}$, 所以展开式中系数最大的是第三项. 故选 B.

20. 12 【解析】由题可知 $(1+2x)^6$ 的展开式的二项式系数为 C_6^k ($k=0, 1, \cdots, 6$), 当 $k=3$ 时, 取得最大值 $a = C_6^3 = 20$. $(1+2x)^6$ 的展开式的系数为 $C_6^k 2^k$ ($k=0, 1, \cdots, 6$), 当满足

$$\begin{cases} C_6^k 2^k \geq C_6^{k+1} 2^{k+1}, \\ C_6^k 2^k \geq C_6^{k-1} 2^{k-1} \end{cases} \text{ 时, 系数最大, 即}$$

$$\begin{cases} \frac{6!}{k! \cdot (6-k)!} 2^k \geq \frac{6!}{(k+1)! \cdot [6-(k+1)]!} 2^{k+1}, \\ \frac{6!}{k! \cdot (6-k)!} 2^k \geq \frac{6!}{(k-1)! \cdot [6-(k-1)]!} 2^{k-1}, \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{1}{6-k} \geq \frac{2}{k+1}, \\ \frac{2}{k} \geq \frac{1}{7-k}, \end{cases} \begin{cases} k+1 \geq 2(6-k), \\ 2(7-k) \geq k, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$\frac{11}{3} \leq k \leq \frac{14}{3}$. 又 $k=0, 1, \dots, 6$, 所以当

$k=4$ 时, 系数的最大值 $b = C_6^4 2^4 = 240$. 故 $\frac{b}{a} = \frac{240}{20} = 12$.

21. 【证明】 (1) 由二项式定理可得 $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = C_n^0 \left(\frac{2}{n}\right)^0 + C_n^1 \left(\frac{2}{n}\right)^1 +$

$$C_n^2 \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + C_n^n \left(\frac{2}{n}\right)^n,$$

若 $n \geq 2$, 则有 $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{2}{n} +$

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{n}\right)^n = 3 +$$

$$\frac{2(n-1)}{n} + \dots + \left(\frac{2}{n}\right)^n \geq 3 + \frac{2(n-1)}{n} =$$

$$3 + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq 3 + 2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) =$$

4, 则 $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \geq 4 (n \geq 2)$ 成立.

(2) 由二项式定理得 $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n =$

$$C_n^0 \left(\frac{2}{n}\right)^0 + C_n^1 \left(\frac{2}{n}\right)^1 + C_n^2 \left(\frac{2}{n}\right)^2 +$$

$$\dots + C_n^n \left(\frac{2}{n}\right)^n,$$

若 $n \geq 2$, 则有 $C_n^2 \geq 1$, 则 $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n =$

$$1 + n \cdot \frac{2}{n} + C_n^2 \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots +$$

$$\left(\frac{2}{n}\right)^n = 3 + C_n^2 \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots +$$

$$\left(\frac{2}{n}\right)^n \geq 3 + \left(\frac{2}{n}\right)^2,$$

$$\text{则 } \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \geq 3 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 (n \geq 2)$$

成立.

22. B 【解析】 由 $a_3 = 330$, 得 $C_5^1 \times C_4^1 \times 3 \times$

$$(-m)^3 + C_5^3 \times 3^3 \times (-m)^2 = 330,$$

所以 $2m^3 - 9m^2 + 11 = (m+1)(2m^2 - 11m + 11) = 0$, 解得 $m = -1$ 或 $m =$

$$\frac{11 + \sqrt{33}}{4} \text{ 或 } m = \frac{11 - \sqrt{33}}{4},$$



因为 $m \in \mathbf{Z}$, 所以 $m = -1$,

$$\text{故} \left(mx + \frac{2\,014}{x} \right)^{2\,014} = \left(-x + \frac{2\,014}{x} \right)^{2\,014},$$

令 $x = 1$, 则有 $(-1 + 2\,014)^{2\,014} = 2\,013^{2\,014}$,

即展开式中所有项的系数和为 $2\,013^{2\,014}$. 故选 B.